ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009

ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 229

β. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 279

Β. α. Σ , β. Λ, γ. Λ , δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

$$z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} - \frac{i^2-3i}{2} =$$

$$= \frac{1-i}{2} - \frac{-1-3i}{2} =$$

$$= \frac{1-i+1+3i}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

α.

$-\overline{z} = -(1-i) = -1 + i$

$z^2 = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$

$z^3 = z^2 \cdot z = 2i(1+i) = 2i + 2i^2 = -2 + 2i$

β.

$A(-\overline{z}) = (-1, 1)$, $B(z^2) = (0 , 2)$, $\Gamma(z^3) = (-2, 2)$

$AB = |-\overline{z} - z^2| = |-1 + i - 2i| = |-1 - i| = \sqrt{2}$

$A\Gamma = |-\overline{z} - z^3| = |-1 + i + 2 - 2i| = |1 - i| = \sqrt{2}$

Αφού $AB = A\Gamma$ το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές

γ.

$|z^3 - z^2|^2 = |-2 + 2i - 2i|^2 = |-2|^2 = 4$ και

$|z^2 + \overline{z}|^2 + |z^3 + \overline{z}|^2 = |2i + 1 - i|^2 + |-2 + 2i + 1 - i|^2 =$

$= |1+i|^2 + |-1 + i|^2 = 2 + 2 + 4$

Συνεπώς $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \overline{z}|^2 + |z^3 + \overline{z}|^2$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

Θα πρέπει $f'(0) = e$.

Όμως $f'(x) = e^{x-\alpha} + x\,e^{x-\alpha}$

Οπότε $f'(0) = e \Leftrightarrow e^{-\alpha} = e \Leftrightarrow \alpha = -1$

β.i.

$f'(x) = e^{x+1} + x\,e^{x+1}$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+1} + x\,e^{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+1}(1 + x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	|	$\nearrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$.

Παρουσιάζει δε ελάχιστο για $x = -1$ το $f(-1) = -1$

β.ii.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{x+1} = (-\infty)\cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-(x+1)}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x'}{\left(e^{-(x+1)}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-(x+1)}} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0$$

Συνεπώς η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α.

$f(x) \geq g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \geq \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 - \ln x \geq 0$

Έστω $h(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$

$h'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Πρόσημο της h' και μονοτονία της h

x	0		1		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	|	$\nearrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η h παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το $h(1) = 0$

Οπότε για κάθε $x > 0$ έχουμε $h(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 - \ln x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq g(x)$

β.i.

Η h, όπως φαίνεται από το (α), είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Οπότε για $1 \leq x \leq e \quad \Leftrightarrow \quad h(1) \leq h(x) \leq h(e) \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq h(x) \leq e - 2$

β.ii.

Επειδή $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1,\ e]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E = \int_1^e h(x)dx = \int_1^e (x-1-\ln x)dx = \int_1^e x dx - \int_1^e 1 dx - \int_1^e \ln x dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e - [x]_1^e - \int_1^e x' \cdot \ln x dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - [x\ln x]_1^e + \int_1^e 1 dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - e + 1 - e + e - 1 =$$

$$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} \text{ τετραγωνικές μονάδες.}$$

β.iii.

$$\int_1^e e^{h(x)}\left[h(x)+1\right]h'(x)dx = \int_1^e [h(x)h'(x)e^{h(x)} + e^{h(x)}h'(x)\}dx =$$

$$= \int_1^e \left(h(x)\, e^{h(x)}\right)' dx = \left[h(x)e^{h(x)}\right]_1^e =$$

$$= h(e)e^{h(e)} - h(1)e =$$

$$= (e-1-1)\, e^{(e-1-1)} - 0 = (e-2)\, e^{e-2}.$$